Introduzione

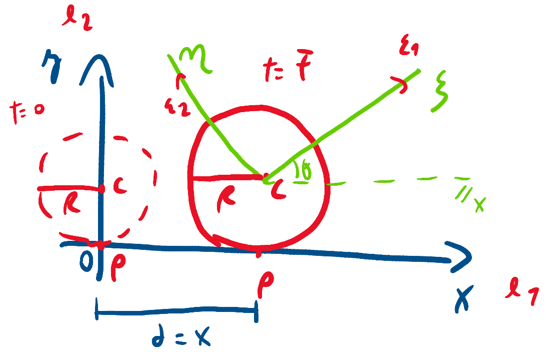
lunedì 8 gennaio 2024 15:03

- 1° ES : CINEMATICA (Da vedere il moto Armonico sulle Registrazioni)
- 2° ES : LAGRANGIANA

Tipologia 1 (Disco)

lunedì 8 gennaio 2024 15:07

ES 7 (02/07/19)



1):

$$C \overset{t=\bar t}{=} \begin{pmatrix} x \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Coordinate assolute di C]

Centro del disco

Il moto di C è costante

• Coordinate assolute di P:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} e_2 = \sin(\theta)\,\varepsilon_1 + \cos(\theta)\,\varepsilon_2 \\ e_1 = \cos(\theta)\,\varepsilon_1 - \sin(\theta)\,\varepsilon_2 \end{array}\right]$$

Coordinate Relative:

$$P - C = \begin{pmatrix} x - x \\ 0 - R \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = -R\,e_2 = \underbrace{-R\left(\sin(\theta)\,\varepsilon_1 + \cos(\theta)\,\varepsilon_2\right)}_{\text{Dimostriamo Questo}}$$

2): (Premessa)

Poniamo

$$0 = \underset{\text{Vel di } P}{V_P} = \underset{\text{Vel di } C}{V_C} + \omega \wedge (P - C)$$

Dove

$$V_C = \frac{\partial}{\partial t} C \Rightarrow V_C = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{x} e_1$$

$$w = +\dot{\theta} e_3$$

$$P-C = -R e_2$$

$$\Rightarrow V_P = \dot{x} e_1 + \dot{\theta} e_3 \wedge (-R e_2) \qquad [e_3 \wedge e_2 = -e_1]$$

$$\Rightarrow V_P = \dot{x} e_1 + \dot{\theta} R e_1$$

Siccome

$$V_P = 0 \Rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta} R$$

Velocità ASSOLUTA di P:

Derivata della Posizione rispetto al tempo

$$V_{P_{\text{ASSOLUTA}}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{x} e_1$$

Velocità RELATIVA di P

Derivata di P-C rispetto al tempo

$$V_{P_{\text{RELATIVA}}} = \underbrace{-R\dot{\theta}\left(\cos(\theta)\,\varepsilon_1 - \sin(\theta)\,\varepsilon_2\right)}_{\text{''}} = -R\dot{\theta} e_1$$

$$= \dot{x} e_1$$

Deriviamo questo

Per l'accelerazione RELATIVA

$$\Rightarrow V_{P_{\text{RELATIVA}}} = V_{P_{\text{ASS}}}$$

VEL DI TRASCINAMENTO:

$$V_{ASS} = V_{REL} + V_{TRAS}$$

$\Rightarrow$

$$V_{TRAS} = 0$$

3) Perché il moto è costante

$\Rightarrow$ $a_{ASS} = 0$

ma a_{REL} c'è

Calcoliamola

Deriviamo la Velocità Relativa

$$a_{REL} = -R\dot{\theta}^2 \left(-\sin(\theta)\, e_1 - \cos(\theta)\, e_2\right) =$$

$$= R\dot{\theta}^2 e_2$$

Troviamo ACCELER COMPLEMENTARE:

$$a_{comp} = 2(\omega \wedge \underbrace{V_{REL}}_{= -R\dot{\theta} e_1}) = 2\left(\dot{\theta} e_3 \wedge (-R\dot{\theta} e_1)\right) = -2R\dot{\theta}^2 e_2$$

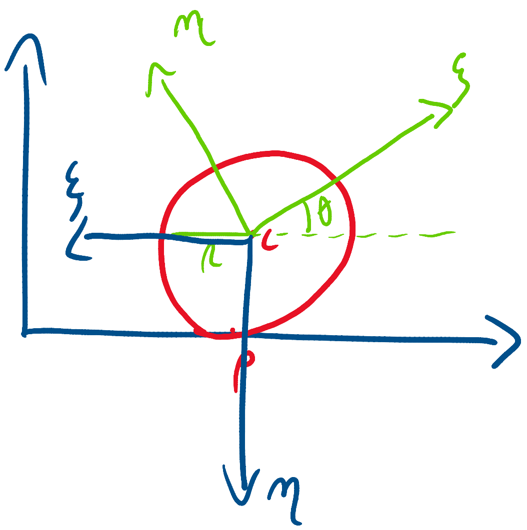
Dal Principio di Coriolis

$$a_{ASS} = a_{REL} + a_{TRAS} + a_{COMPL}$$

$$a_{ASS} = 0, \quad a_{REL} = R\ddot{\theta} e_2, \quad a_{COMPL} = -2R\dot{\theta}^2 e_2$$

$$\Rightarrow \quad a_{TRASC} = R\ddot{\theta} e_2$$

4)



Avere asse ξ contatto nullo

Ma su η sfruttiamo il fatto che:

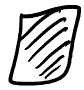
$$P - C = -R(\underbrace{\sin(\theta) E_1}_{\xi} + \underbrace{\cos(\theta) E_2}_{\eta})$$

e annulliamo

$$\sin(\theta) E_1$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) E_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = k\pi$$

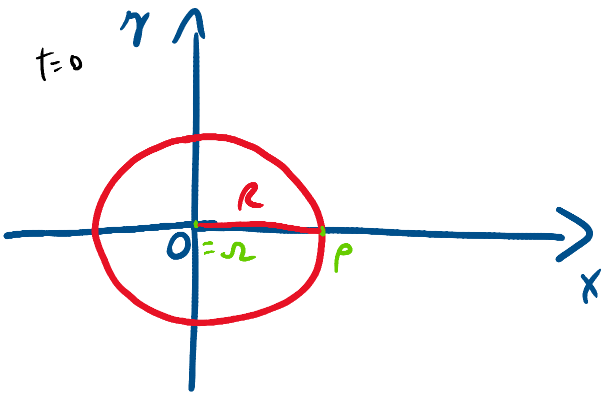


Tipologia 1 (Disco) (simile)

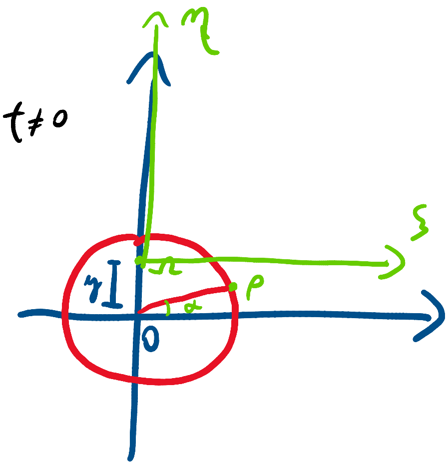
lunedì 8 gennaio 2024 16:02

Es 1 (28/01/2021)

t=0



t≠0



1):

Riferimento ASSOLUTO

$$P - O = P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\alpha) \\ R\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riferimento RELATIVO

$$P - \Omega = \underbrace{R\left(\cos(\alpha)\, e_1 + \sin(\alpha)\, e_2\right)}_{P-O} - \underbrace{(\Omega - O)}_{\text{SONO LE EQ DI } \Omega \text{ rispetto al Riferimento ASSOLUTO}}$$

Per i MOTI COMPOSTI

$$P - O = (P - \Omega) + (\Omega - O)$$

$$\Rightarrow P - \Omega = (P - O) - (\Omega - O)$$

$$= (P - O) + (O - \Omega)$$

⇒ Sappiamo a_Ω = costante

ACCELERAZIONE (Derivata seconda dello Spazio)

$$\Rightarrow a = \ddot{y} = K\, e_2$$

$$\Rightarrow a_\Omega = \ddot{y} = \underset{\text{Costante}}{K} e_2$$

$$\Rightarrow V_\Omega = \int K e_2 \, dt = K t e_2$$

$$\Rightarrow \Gamma_\Omega = \int K t e_2 = \frac{1}{2} K t^2 e_2$$

$$\parallel$$

$$\Omega - O$$

$$P - \Omega = R(\cos(\alpha) e_1 + \sin(\alpha) e_2) - \frac{1}{2} K t^2 e_2$$

Siccome $e_1, e_2 \parallel \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$

Consideriamo e_1, e_2 anche per Ω

2): Cominciamo con

$V_{ASSOLUTA}$ = Derivata di $P - O$ rispetto al tempo $= -R \dot{\alpha} \sin(\alpha) e_1 + R \dot{\alpha} \cos(\alpha) e_2$

$\Rightarrow$

a_{ASS} = deriva $V_{Assoluta}$ $= -R \dot{\alpha}^2 \cos(\alpha) e_1 - R \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) e_2$

Per la Velocità Relativa deriva $P - \Omega$

$$\Rightarrow V_{Rel} = -R \dot{\alpha} \sin(\alpha) e_1 + R \dot{\alpha} \cos(\alpha) e_2 - K t e_2$$

$$\Rightarrow V_{REL} = -R\dot{\alpha}\sin(\alpha)\,e_1 + R\dot{\alpha}\cos(\alpha)\,e_2 - Kt\,e_2$$

$$\Rightarrow a_{REL} = \text{derivata di } V_{REL} = -R\dot{\alpha}^2\cos(\alpha)e_1 - R\dot{\alpha}^2\sin(\alpha)e_2 - Ke_2$$

Troviamo Prima a_{TRAS}

DAL PRINCIPIO DEI MOTI RELATIVI

$$V_{ASS} \overset{\downarrow}{=} V_{REL} + V_{TRAS}$$

$$\Rightarrow V_{TRAS} = V_{ASS} - V_{REL} = \dots = Kt\,e_2$$

$$\Rightarrow a_{TRAS} = \text{Derivo } V_{TRAS} = \dots = K\,e_2$$

Troviamo a_{COMP} :

Sfrutto

$$a_{ASS} = a_{REL} + a_{TRAS} + a_{COMP}$$

$(a_{COMP} = 2\omega \wedge V_{REL})$

$$\Rightarrow a_{COMP} = \dots = 0$$

3) :

Dm

$$P - \Omega = R\left(\underbrace{\cos(\alpha)\, e_1}_{\Downarrow \text{ ANNULLIAMO QUESTO}} + \sin(\alpha)\, e_2\right) - \frac{1}{2} k t^2 e_2$$

$\Rightarrow$

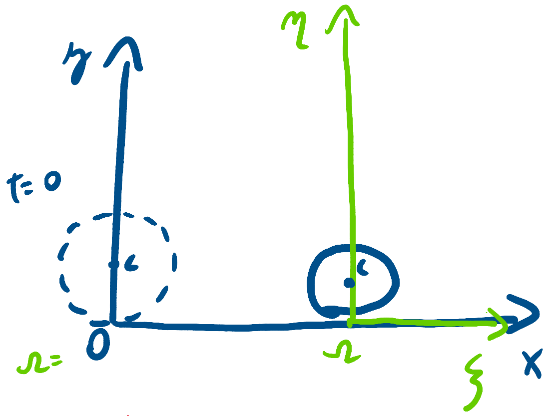
$$R \cos(\alpha)\, e_1 = 0 \iff \dots \iff \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$\blacksquare$

Tipologia 1 (disco) (simile 2.0)

mercoledì 10 gennaio 2024 18:04

Es 1 (22/07/2019)



$e_1, e_2, e_3 \parallel \xi_1, \xi_2, \xi_3$

$$C \overset{\text{ASSOLUTO}}{=} \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{cc_\Omega} \overset{\text{ASSOLUTO}}{=} \text{costante} = \ddot{x}$$

$$V_\Omega = \int \ddot{x}\, dt = \dot{x}\, t$$

$$r_\Omega = \int \dot{x}\, t\, dt = \frac{1}{2} x t^2$$

1): Eq moto Ass

$$C = \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq moto Rel

$$C - \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = R\, e_2$$

2):

$$Vel_{Ass} = \dot{x}\, e_1$$

c

$$Vel_{Rel_C} = 0$$

$$Vel_{Tras_C} = V_{ASS} - V_{REL} = \dot{x}\, e_1$$

3) $$a_{ASS_C} = \ddot{x}\, e_1$$

$$\left[a_{ASS} = a_{REL} + a_{TRAS} + \overset{2\omega_A V_{TRAS}}{\overset{\shortparallel}{a_{COMP}}} \right]$$

$$a_{REL_C} = 0$$

$$a_{TRAS_C} = \ddot{x}\, e_1$$

$$a_{COMP_C} = 0$$

4): (ASSE di Mozzi)

(Premessa)

[Condizione di Rotolamento]

$$\underbrace{V_\Omega}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{IMPONGO}}} = \underbrace{V_C}_{\text{ASSOLUTO}} + \underbrace{\overset{\omega = \dot{\theta} e_3}{\omega_D}}_{\text{Vel Angol del Disco}} \wedge \underbrace{(\Omega - C)}_{\text{Punto di contatto "meno" il centro del disco}}$$

$\Rightarrow$

$$0 = \dot{x}\, e_1 + \dot{\theta}\, e_3 \wedge (-R\, e_2)$$

$$0 = \dot{x} e_1 + \dot{\theta} e_3 \wedge (-R e_2)$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{x} e_1 + \dot{\theta} R e_1 \Rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta} R$$

(Fine Premessa)

Es ASSE di Mozzi

Ci interessa solo A^*

$$A(t) = \underbrace{A^*}_{\text{Centro Istantaneo di Rotazione}} + K e_3 \qquad \left[A(t) = A^* + \mu \frac{\omega}{|\omega|} \right]$$

$$A^* = C + \frac{\omega_D \wedge V_C}{|\omega_D^2|}$$

Centro del disco

Vel angolare del disco

$\Rightarrow$

$$A^* = x e_1 + R e_2 + \frac{\cancel{\dot{\theta}} e_3 \wedge \dot{x} e_1}{|\dot{\theta}|^{\cancel{2}}} = \begin{pmatrix} x \\ R \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ R \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} e_2 = x e_1 + R e_2 - R e_2 = x e_1$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ R \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \dot{x} \\ \hline -\frac{\dot{x}}{R} \end{array} \, e_2 = x e_1 + R e_2 - R e_2 = x e_1$$

Cioè

$$A^* = x e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(t) = A^* + \mu \frac{\omega}{|\omega|} = x e_1 + \mu \frac{\omega}{|\omega|}$$ (Riferimento Assoluto)

$$A(t) = A^*_{nuovo} + \mu \frac{\omega}{|\omega|}$$ (ASSE RELATIVO)

$$A^*_{NUOVO} = A^* - C = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = -R e_2$$

5) Vel Istante di trasl

$$V_{A^*} = V_C + \omega \wedge (A^* - C)$$

$\Rightarrow$

$$V_{A^*} = \dot{x}\, e_1 + \dot{\theta}\, e_3 \wedge \left(-R e_2\right) =$$

$$= \dot{x}\, e_1 + \dot{\theta} R e_1 = \dot{x}\, e_1 - \frac{\dot{x}}{R} R\, e_1$$

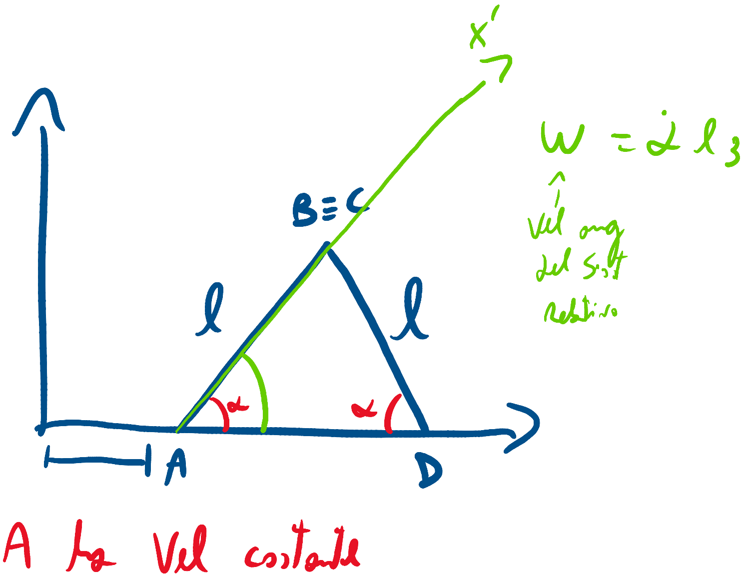
$$= 0$$

$\blacksquare$

Tipologia 1 (Asta)

mercoledì 10 gennaio 2024 18:38

Es 1 (4/02/2020)



1)

$$r_A = x$$

$$V_A = \dot{x} = \text{costante}$$

$$r_B = \begin{pmatrix} x + l\cos(\alpha) \\ l\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$V_B = \begin{pmatrix} \dot{x} - l\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ l\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$a_B = \begin{pmatrix} \ddot{x} - l\dot{\alpha}^2\cos(\alpha) \\ -l\dot{\alpha}^2\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

2)

$$A(t) = A^* + \mu \frac{\omega}{|\omega|}$$

$\Rightarrow$

$$A^* = A + \frac{\omega \wedge V_A}{|\omega|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\dot{\alpha} e_3 \wedge \dot{x} e_1}{|\dot{\alpha}|^2} = x e_1 + \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} e_2$$

$$\underset{REL}{A(t)} = A^*_{NUOVO} + \mu \frac{\omega}{|\omega|}$$

$$A^*_{NUOVO} = A^* - A = \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} e_2$$

con $e_2 = \sin(\alpha) \mathcal{E}_1 + \cos(\alpha) \mathcal{E}_2$

3)

$$V_{TRAS}$$

$$\parallel$$

$$V_{A^*} = V_A + \omega \wedge (A^* - A)$$

$$= \dot{x} e_1 + \dot{\alpha} e_3 \wedge \left(\frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} e_2\right) =$$

$$= \dot{x} e_1 - \dot{x} e_1 = 0$$

$$V_{ROT} = \omega_B = \omega_C = \frac{V}{R} = \frac{V_B}{l}$$

$$V_{ROT} = \omega_B = \omega_C = \frac{V}{R} = \frac{V_B}{l}$$

4): Il moto è roto-traslatorio [Perché l'asta AB ruota e si trasla]

e l'atto di moto è rototraslatorio

perché la $\underbrace{\text{velocità istantanea di traslazione}}_{= V_{A^*}}$ è nulla

5):

$$\omega_{Rel_{NUOVA}} = \dot{\alpha}\, e_3 = \omega_{ASS}$$

$$\omega_{TRAS} = 0$$

Perché

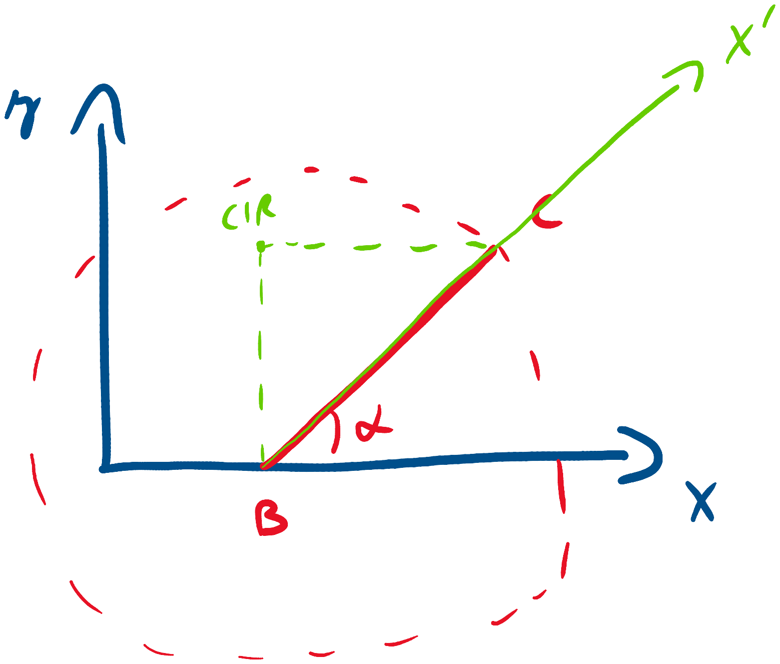
$$\omega_{ASS} = \omega_{REL_{NUOVA}} + \omega_{TRAS}$$

∎

Tipologia 1 (Asta) (simile)

venerdì 12 gennaio 2024 12:09

Es 1 (31/07/2020)



1)

$$B = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} x + l\cos(\alpha) \\ l\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$V_B = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_C = \begin{pmatrix} \dot{x} - l\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ l\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$a_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_C = \begin{pmatrix} -l\dot{\alpha}^2 \cos(\alpha) \\ -l\dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

2) Velocità angolare

$$\omega = \dot{\alpha}\, e_3$$

Vel istant di traslazione $\Rightarrow$ ASSE DI MOZZI

Dunque

$$A(t) = A^* + \mu \frac{\omega}{|\omega|}$$

$$A^* = B + \frac{\omega \wedge V_B}{|\omega|^2} = x e_1 + \frac{\dot{\alpha} e_3 \wedge \dot{x} e_1}{|\dot{\alpha}|^2} = x e_1 + \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} e_2$$

Centro Istantaneo Rotazione

$$= \begin{pmatrix} x \\ \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vel Istant Trasl

$$V_A = V_B + \omega \wedge (A^* - B)$$

$$\wedge\left(+ \frac{\dot{x}}{\ }e_2\right) - \dot{x} e_1 - \dot{x} e_1 = 0$$

$$= \dot{x} l_1 + \dot{\alpha} l_3 \wedge \left(+ \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} l_2 \right) = \dot{x} l_1 - \dot{x} l_1 = 0$$

(Siccome $V_A = 0$ $\Rightarrow$ ATTO DI MOTO È ROTOTRASLATORIO)

3) $CIR = A^*$

$$A^*_{NUOVO} = A^* - B = \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} l_2 = \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} \left(\sin(\alpha) \mathcal{E}_1 + \cos(\alpha) \mathcal{E}_2 \right)$$

4) ASSOLUTA

$$W = \dot{\alpha} l_3$$

$$W_{NUOVA} = -3W = -3 \dot{\alpha} l_3$$

Vel Angol di Trascinamento

Siccome

$$W_{ASS} = W_{REL} + W_{TRAS}$$

$\Rightarrow$

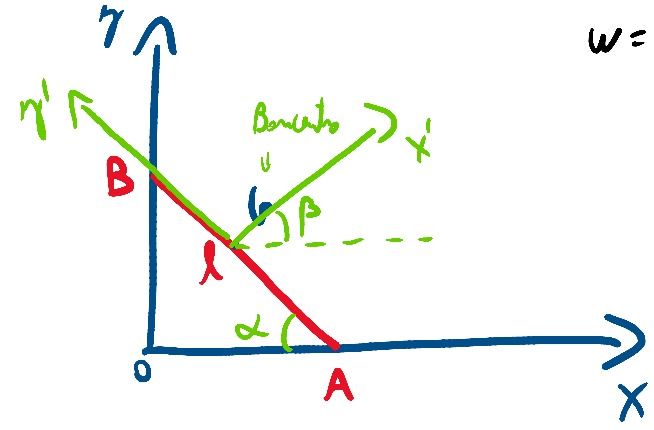
$$W_{REL} = \ldots = 4\,\dot{\alpha}\,l_3$$

$\blacksquare$

Tipologia 1 (Asta) (2.0)

martedì 16 gennaio 2024 18:33

Es 1 (22/02/2023) (Foto whatsapp Francesca)



$\omega = \dot{\alpha}\, e_3$ = costante

$$G = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos(\alpha) \\ \frac{l}{2}\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$V_G = \begin{pmatrix} -\frac{l}{2}\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ \frac{l}{2}\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

SOL

1) $$\underset{\text{ASSOLUTO}}{CIR_{(x,y)}} = A^* = G + \frac{\omega \wedge V_G}{|\omega|^2} =$$

$$= \frac{l}{2}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + \frac{\cancel{\dot{\alpha}}\, e_3 \wedge \frac{l}{2}\begin{pmatrix} -\cancel{\dot{\alpha}}\sin(\alpha) \\ \cancel{\dot{\alpha}}\cos(\alpha) \end{pmatrix}}{|\dot{\alpha}|^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{l}{2}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} - \frac{l}{2}\sin(\alpha)\, e_2 - \frac{l}{2}\cos(\alpha)\, e_1 =$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Assoluto}}{CIR} = 0$$

$$\underset{\text{Relativo}}{CIR} = A^* - G = 0 - G = -\frac{l}{2}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{l}{2}\left[\cos(\alpha)\, e_1 + \sin(\alpha)\, e_2\right] =$$

$$= -\frac{l}{2}\cos(\alpha)\left(\cos(\beta)\varepsilon_1 - \sin(\beta)\varepsilon_2\right) - \frac{l}{2}\sin(\alpha)\left(\sin(\beta)\varepsilon_1 + \cos(\beta)\varepsilon_2\right)$$

Vel. di trasl.

2)

$$V_{A^*} = V_G + \omega \wedge (A^* - G)$$

$$= \frac{l}{2}\left(-\dot{\alpha}\sin(\alpha)e_1 + \dot{\alpha}\cos(\alpha)e_2\right) + \dot{\alpha}e_3 \wedge \left(-\frac{l}{2}\left(\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2\right)\right)$$

$$= \frac{l}{2}\left(-\dot{\alpha}\sin(\alpha)e_1 + \dot{\alpha}\cos(\alpha)e_2\right) - \frac{l}{2}\dot{\alpha}\cos(\alpha)e_2 + \frac{l}{2}\dot{\alpha}\sin(\alpha)e_1 =$$

$$= 0$$

Moto rototraslatorio piano perché $V_{A^*} = 0$

l'atto di moto è ROTATORIO perché $\omega \neq 0$

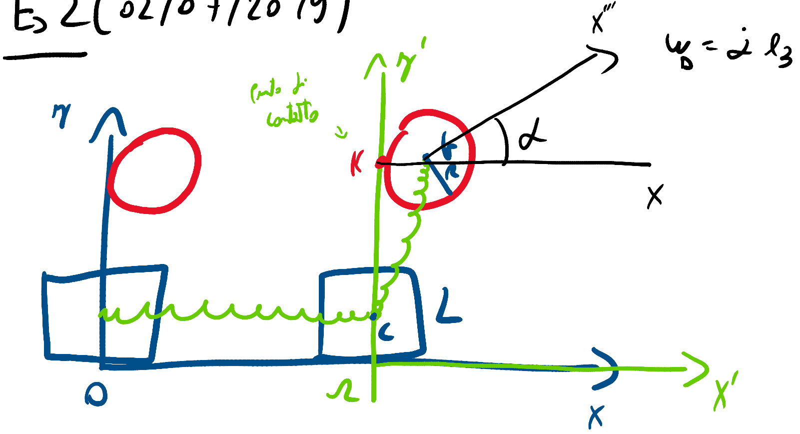
4) Sempre perché CIR $= 0$

Assoluto

Tipologia 2 (Lamina)

venerdì 12 gennaio 2024 12:27

Es 2 (02/07/2019)



$$\Omega = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} x \\ L/2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x + R \\ y \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1)

Lagrangiana

Energia cinetica $\left(\frac{1}{2} m v_p^2\right)$

$$\mathcal{L} = K - U$$

Energia Potenziale

Per la

Condizione di Rotolamento senza strisciamento:

$$0 = V_K = V_G + \omega_D \wedge (K - G)$$

Velocità del Punto di contatto

$V_G = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

Punto di contatto

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{\alpha}\, e_3$

di giusto

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{y} e_2$$

Si ha

$$0 = \dot{y} e_2 + \dot{\alpha} e_3 \wedge (-R e_1)$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{y} e_2 - \dot{\alpha} R e_2 \Rightarrow \dot{y} = \dot{\alpha} R$$

Energia Cinematica:

Per il Teo di Konig

$$E_{c_D} = E_{c_G} + \underset{\frac{1}{2} I \omega^2}{\underset{\shortparallel}{\text{moto intorno al baricentro}}}$$

$$E_{c_{TOT}} = \underset{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}{\underset{\shortparallel}{E_{c_{LAMINA}}}} + \underset{\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\underset{\shortparallel}{E_{c_{\text{PUNTO G del disco}}}}} + E_{c_{ROTOLAMENTO}}$$

$$E_{c_{ROTOLAMENTO}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{4} m R^2 \left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} m \dot{y}^2$$

$$\Rightarrow E_{c_{TOT}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4} m \dot{y}^2$$

Troviamo

$$U_{TOT}$$

Si ha

$$U_{LAMINA} = m g \frac{L}{2}$$

$$U_{DISCO} = m g y$$

$$U_{ELASTICA} = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (b - c)^2 + \text{costante}$$

$$U_{\substack{ELASTICA\\TOT}} = \frac{1}{2}k x^2 + \frac{1}{2}k(b-c)^2 + \text{costante}$$

$$U_{TOT} = \dots = mgy + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(y - \frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = K_{TOT} - U_{TOT}$$

2) Equazioni di Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$$

3) Integrali Primi del moto

"L'energia meccanica $E_M = K + U$ è un integrale primo del moto perché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo"

4) Configurazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dots = kx \overset{\text{IMPONGO}}{=} 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dots = mg + k\left(y - \dfrac{L}{2}\right) \overset{\text{IMPONGO}}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\[2ex] y = -\dfrac{mg}{k} + \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

[Lo sfrutto nel Punto n° 5]

Studiare la stabilità:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

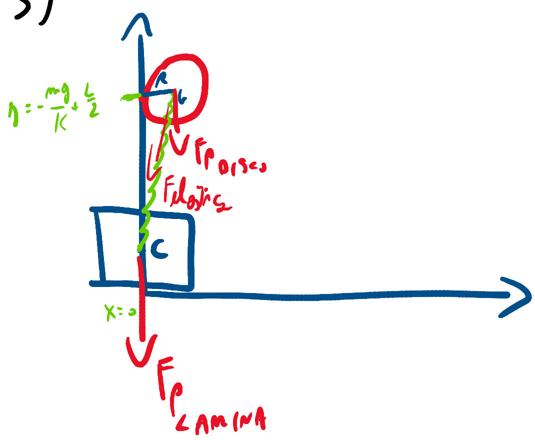
$\det(H) = K^2 > 0$

Se $\det(H) > 0 \Rightarrow$ pto di MIN

$\Rightarrow$ Equilibrio di Stabile

Se $\det(H) \leq \Rightarrow$ Equilibrio instabile

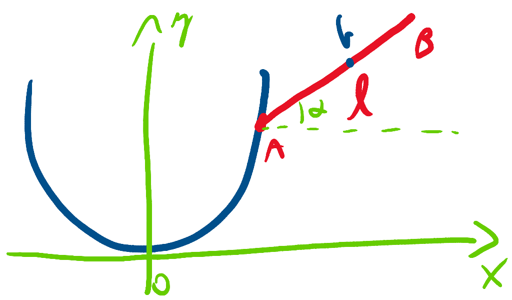
5)



Tipologia 2 (Parabola)

martedì 16 gennaio 2024 18:12

Es 2 (09/07/2022)



$$A = \begin{pmatrix} x \\ a x^2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} x + \frac{l}{2}\cos(\alpha) \\ a x^2 + \frac{l}{2}\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x + l\cos(\alpha) \\ a x^2 + l\sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \omega = \dot{\alpha}\, e_3$$

Sol

1) $\mathcal{L} = K - U$

TEO DI KONIG

$$K = K_G + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3} l^2 \omega^2$$

e_3

$$V_G = \begin{pmatrix} \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ 2 a x \dot{x} + \dot{\alpha}\frac{l}{2}\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m \left(\left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\alpha}\sin(\alpha)\right)^2 + \left(2 a x \dot{x} + \dot{\alpha}\frac{l}{2}\cos(\alpha)\right)^2 \right) + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\alpha}$$

y_G

$$U = m g h_G + c = m g \left(a x^2 + \frac{l}{2}\sin(\alpha)\right) + c$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = K - U$$

2) L'energia meccanica $E = K + U$ non dipende da t perciò è un integrale primo del moto

L'energia meccanica $E = K + U$ [illegible]
integrale primo del moto

3)

IMPONGO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} = mg\,\dfrac{l}{2}\cos(\alpha) \overset{\Downarrow}{=} 0 & \Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2mg\,a\,x = 0 & \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{3}{2}\pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \eta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \eta = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

α e x sono le nostre incognite

$$H\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -mg\,\dfrac{l}{2}\sin\overset{\frac{\pi}{2}}{\overset{\Downarrow}{(\alpha)}} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha\,\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial \alpha} = 0 & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2mg\,a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -mg\frac{l}{2} & 0 \\ 0 & 2mga \end{pmatrix}$$

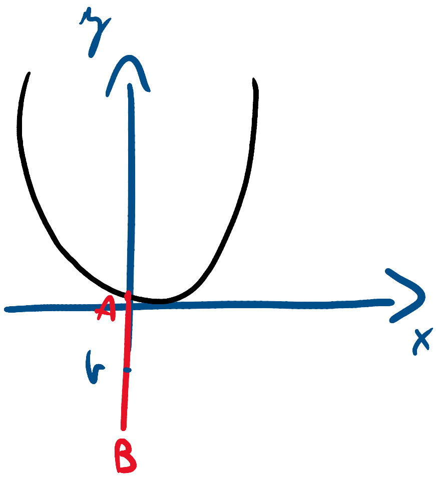
$\Rightarrow \det(H) < 0 \Rightarrow$ instabile

$$H\left(0,\tfrac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} mg\frac{l}{2} & 0 \\ 0 & 2mga \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(H) > 0$

$\Rightarrow$ equilibrio stabile

4)



$\phi = - mg\, l_2$